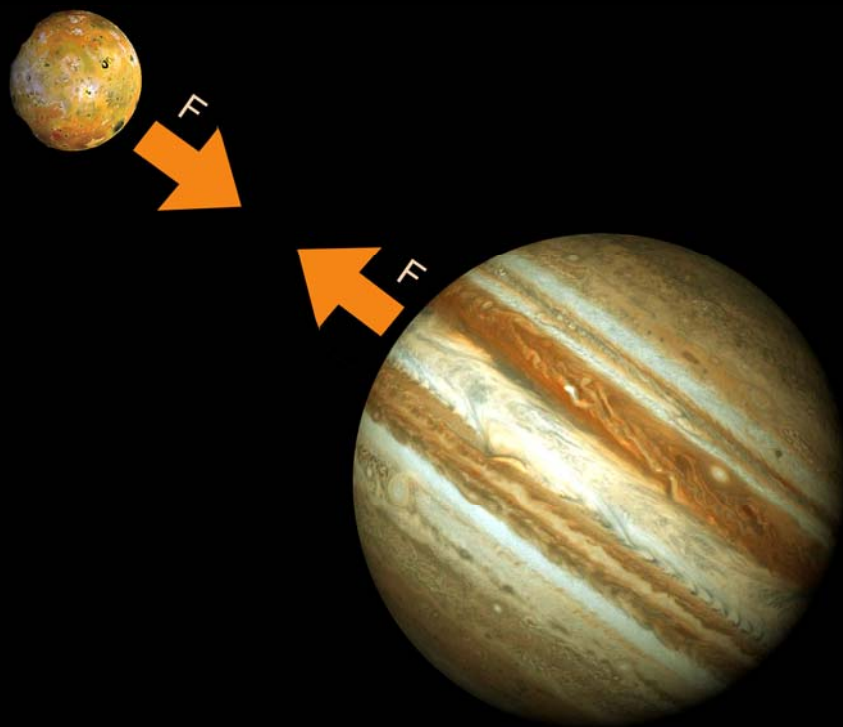


GRAVITACIÓN



Gravitación

Resumo:

Nesta unidade preténdese que os alumnos, mediante a observación das órbitas dos satélites galileanos de Xúpiter e das estrelas próximas ao centro galáctico, determinen as masas de Xúpiter e do buraco negro no centro da Vía Láctea.

Contidos:

As tres leis de Kepler e a lei da gravitación de Newton

1. Observación dos satélites de Xúpiter

Identificación e observación dos satélites
Análise das observacións
Determinación da masa de Xúpiter

2. O centro da Galaxia

Metodoloxía e observacións
Determinación da masa do obxecto central

Nivel:

Segundo ciclo de ESO e Bacharelato

Referencia:

L'astronomia a les aules. Manual didàctic per a educació primària i secundària
www.astronomia2009.cat/bin/view/Main/Recursos#Manual_did_ctic_L_astronomia_a_l

Autores:

Carme Jordi (Departamento de Astronomía e Meteoroloxía da Universitat de Barcelona)

Robert Estalella (Departamento de Astronomía e Meteoroloxía da Universitat de Barcelona)



Coordinadora apuntamentos pedagóxicos "Con A de Astrónomas":

Josefina F. Ling (Universidade de Santiago)

Axudantes de maquetación e tradución:

Surinye Olarte Vives, Alejandra Díaz Bouza



Ella es una Astrónoma



GRAVITACIÓN

Introdución

A lei da gravitación de Newton rexe os movementos dos corpos celestes (deixando de lado os efectos da relatividade xeral). A observación dos movementos de planetas, satélites, cometas e estrelas, permite deducir as ecuacións empíricas de Kepler e tamén determinar as masas dos corpos en movemento.

O obxectivo é proporcionarlle material ao profesor para realizar exercicios para deducir as masas no Sistema Solar e mesmo no centro da galaxia. O profesor pode adaptar o nivel dos exercicios e a súa profundidade ao nivel do curso que imparte.



Imaxe de Xúpiter e os catro satélites galileanos, tal e como se observa con telescopios de pequenas dimensións.

As tres leis de Kepler e a lei da gravitación de Newton

Johannes Kepler deduciu tres leis para o movemento dos planetas arredor do Sol a partir das súas propias observacións e das do seu mestre Tycho Brahe. As tres leis son:

1. Os planetas describen órbitas elípticas e o Sol atópase nun dos seus focos. (Fig. 1).

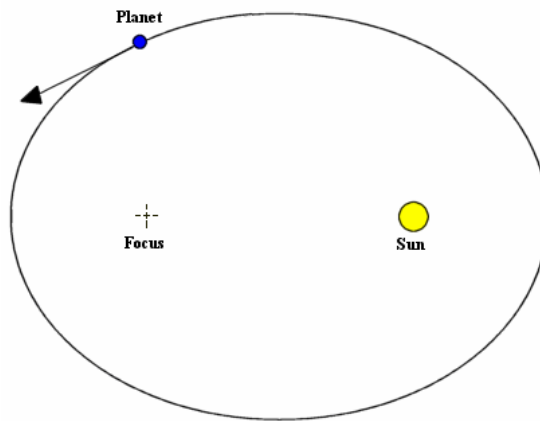


Fig. 1 Órbita elíptica dun planeta arredor do Sol.

2. O raio vector que une o Sol co planeta varre áreas iguais en tempos iguais (lei de conservación das áreas, fig. 2):

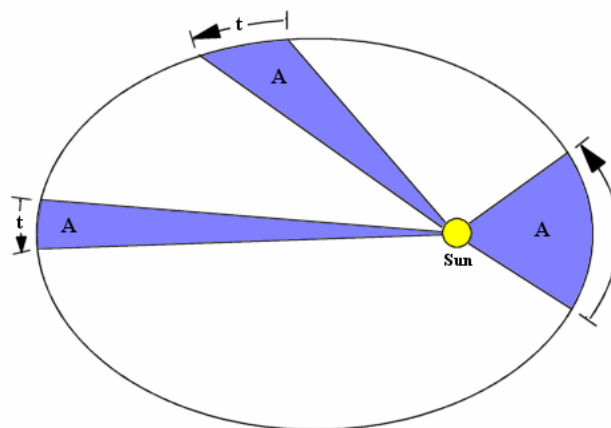


Fig. 2: Representación da lei das áreas: as áreas azuis son todas iguais.

3. O período P de translación ao redor do Sol ao cadrado é proporcional ao semieixe maior da órbita d ao cubo:

$$P^2 \text{ é proporcional a } d^3$$

Os valores dos períodos P (expresados en anos) e dos semieixes d (expresados en unidades do semieixe da órbita da Terra) das órbitas podédelos ver na seguinte táboa:

	$P(\text{anos})$	$d(d_{\text{Terra}})$	P^2/d^3
Mercurio	0.24	0.387	1
Venus	0.615	0.723	1
Terra	1	1	1
Marte	1.88	1.524	1
Xúpiter	11.86	5.203	~1
Saturno	29.457	9.539	~1
Urano	84.36	19.24	1
Neptuno	165.5	30.14	1

[Aquí o profesor pode facer notar as proporcións entre as distancias medias d , as proporcións entre os anos, pode facer calcular o cociente P^2/d^3 para que o alumnado comprobe el mesmo a igualdade de todos os cocientes. O profesor tamén pode cambiar as unidades supondo, por exemplo, que collemos Marte como referencia e non a Terra.]



Johannes Kepler, 1571-1630



Isaac Newton 1642-1727

A formulación da Lei da gravitación por parte de Isaac Newton anos máis tarde como

$$\vec{F} = \frac{G M m}{r^3} \vec{r}$$

permite deducir as leis empíricas de Kepler e xeneralízaas a calquera caso de dous corpos masivos que exercen atracción gravitacional mutua: un planeta e un satélite (natural ou artificial), o Sol e un cometa, dúas estrelas, etc.

En particular, da lei da gravitación dedúcese que, se un corpo de masa m describe unha órbita elíptica de semieixe arredor dun corpo de masa M con período P

$$G (M + m) = \frac{4\pi^2 d^3}{p^2}$$

e, se a masa M é moito máis grande que m , como no caso do Sol, que é moito máis masivo que un planeta, podemos desprezar m e, entón,

$$\frac{G M}{4\pi^2} \sim \frac{d^3}{p^2}$$

e, por tanto, deducimos que p^2 é proporcional a d^3 , que non é máis que a terceira lei de Kepler.

Método:

Os exercicios que propoñemos son:

1. Determinación da relación entre a masa de Xúpiter e a masa do Sol, mediante a observación do movemento dos satélites de Xúpiter
2. Determinación da masa do burato negro do centro da galaxia, mediante a observación dos movementos das estrelas da súa contorna entorno

A primeira actividade realízase mediante observacións con telescopio. En caso de non ter telescopio, ou no caso de querer facer unha simulación previa á sesión de observación, é moi útil empregar un programa gratuíto (en inglés) que se pode descargar desde a web proxecto CLEA: <http://www3.gettysburg.edu/~marschal/clea/juplab.html>

1. Observación dos satélites de Xúpiter

Este experimento combina observación con cálculo seguindo os mesmos métodos que xa se usaron no século XVI e que permitiron determinar a relación entre a masa de Xúpiter e a do Sol.

1.1 Obxectivos

- Observación dos satélites galileanos de Xúpiter (Io, Europa, Ganímedes e Calisto)
- Determinación dos seus períodos
- Determinación das distancias medias ao planeta
- Determinación da masa de Xúpiter

1.2 Material

- Telescopio
- Papel para debuxar á escala (se se fai en papel milimetrado ou cuadriculado é máis fácil) ou tamén se pode utilizar calquera programa gráfico de computador
- Calculadora

1.3 Identificación dos satélites

A continuación dáse un algoritmo para calcular a elongación de cada satélite galileano respecto de Xúpiter, en unidades de raios de Xúpiter, para un día e un tempo dados. Un valor positivo da elongación significa que o satélite está ao leste de Xúpiter e un valor negativo, ao oeste.

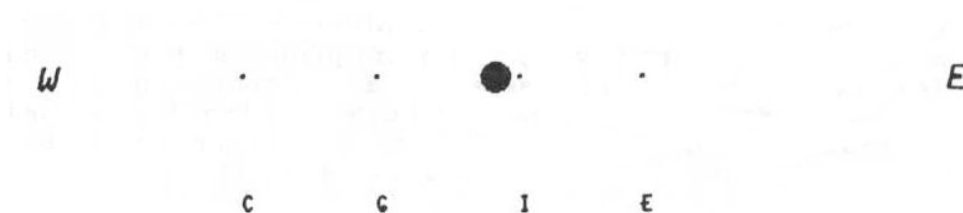


Figura 1.1: Xúpiter e os 4 satélites galileanos identificados coas súas iniciais

Algoritmo:

Entrada	Cálculo	Datos	
Ano(>1988)	$A = \text{Ano} - 1989$ $X = 365 * A + \text{INT}(A/4)$	MES	M
		1	0
		2	31
Mes(1-12)	$X = X + M(\text{Mes})$ (valores da táboa)	3	59

	si (Mes>2 i Ano bisesto) X = X + 1	4	90
Día	X = X + Día	5	120
	X é o número de días dende o 0 xaneiro 1989	6	151
		7	181
		8	212
Hora	T = X + Hora/24	9	243
		10	273
		11	304
Min	T = T + Min/1440	12	334

<p>Cálculo para Io</p> <p>FASE = $203.40586 \cdot (T + 0.7448)$ (graos)</p> <p>E = $6.9 \cdot \sin(\text{FASE})$ (raios de Xúpiter)</p>	<p>Cálculo para Europa</p> <p>FASE = $101.29163 \cdot (T + 2.9205)$ (graos)</p> <p>E = $9.4 \cdot \sin(\text{FASE})$ (raios de Xúpiter)</p>
<p>Cálculo para Ganímedes</p> <p>FASE = $50.234517 \cdot (T + 5.5280)$ (graos)</p> <p>E = $15 \cdot \sin(\text{FASE})$ (raios de Xúpiter)</p>	<p>Cálculo para Calisto</p> <p>FASE = $21.487980 \cdot (T + 4.3926)$ (graos)</p> <p>E = $26 \cdot \sin(\text{FASE})$ (raios de Xúpiter)</p>

Se non se pode utilizar este algoritmo, o proxecto CLEA ten un módulo dedicado a Xúpiter que permite facer as simulacións (<http://www3.gettysburg.edu/~marschal/clea/juplab.html>).

1.4 Observación dos satélites

A observación débese facer cada dúas horas para Io e Europa; para Ganímedes, durante un mínimo de catro días con dúas ou tres observacións diarias; para Calisto un mínimo de oito días cunha ou dúas observacións diarias.

Enfocade co telescopio Xúpiter e os satélites e, mediante a predición que fixestes cos algoritmos, identificádeos todos. Debuxade as súas posicións respecto ao planeta no papel milimetrado (ou directamente sobre o computador). Medide a distancia ao planeta, en unidades de raios de Xúpiter, e anotade o valor xuntamente co tempo en que se fixo a observación na táboa seguinte:

Distancias ao centro de Xúpiter, en raios de Xúpiter

Día	Hora	Io	Europa	Ganímedes	Calisto

1.5 Análise das observacións

Debuxade nunha gráfica os valores das distancias obtidas en función do tempo da observación e determinade o valor máximo da distancia do satélite a Xúpiter (r_0).

Collede dous puntos observados da curva, un a cada lado do máximo, e anotade os valores das distancias, en raios de Xúpiter (r_1 i r_2) e os tempos (t_1 i t_2) de observación (ver fig. 1.2).

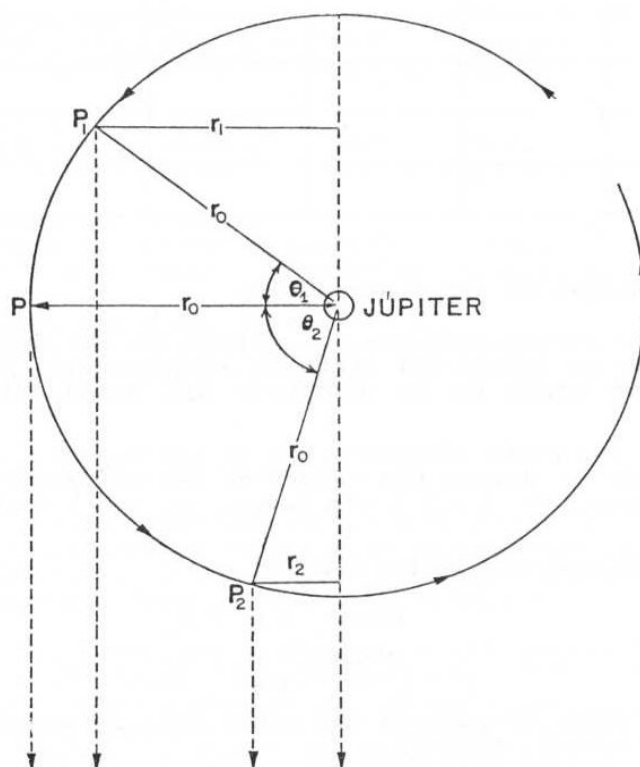


Figura 1.2: Movemento dun satélite na contorna de Xúpiter nunha órbita circular

Da figura anterior podemos deducir

$$\cos\theta_1 = \frac{r_1}{r_0}; \cos\theta_2 = \frac{r_2}{r_0}$$

Para calcular o período do satélite, se supomos unha órbita circular, teremos

$$P(\text{días}) = 360^\circ \frac{t_2 - t_1}{\theta_2 - \theta_1}$$

onde os tempos se deben expresar en días e en fraccións de días. O raio da órbita do satélite ao redor de Xúpiter será

$$d(\text{km}) = R \cdot r_0$$

onde R é o raio de Xúpiter en quilómetros (71400km) e r_0 é a distancia máxima obtida, en raios de Xúpiter. Para que o profesorado o teña como referencia, os resultados terían que ser os das dúas primeiras columnas da táboa seguinte (podedes facelo con r_0 ou con d):

	$P(\text{días})$	$r_0 (R_{\text{xúpiter}})$	P^2/r_0^3
Io	1.769	5.91	~66
Europa	3.551	9.40	~66
Ganímedes	7.155	15.0	~66
Calisto	16.69	26.4	~66

Podedes facer calcular o cociente P^2/r^3 ao alumnado e facerlle notar que o resultado tamén dá unha constante, porque tamén rexe a terceira lei de Kepler.

Nas observacións visuais a estimación da distancia dos satélites a Xúpiter depende moito do observador: uns tenden a sobrevalorar a distancia e os outros a infravaloralas. Está ben que o experimento o realicen diferentes alumnos de maneira que teñades bastantes medidas e poidades minimizar os erros persoais. Se o profesor o cre conveniente pode facer unha discusión do concepto da media e a dispersión dos valores deducidos polos diferentes alumnos, do descarte de medidas discordantes, etc.; isto é, basicamente introducir o alumnado nos conceptos do tratamento estatístico.

1.6 Determinación da masa de Xúpiter

Pasade o período P a anos (1 ano = 365,2422 días) e o raio d a unidades astronómicas (UA) (1 UA = $149,6 \cdot 10^6$ km). A masa de Xúpiter podémola calcular mediante a expresión

$$M = \frac{d^3}{P^2}$$

onde M se obtén en masas solares. Obtende a media das masas calculadas a partir de diferentes satélites.

1.7 Cuestións

- Que leis de Kepler sobre o movemento planetario se utilizaron? Que hipóteses adicionais sobre a masa e a órbita dos satélites galileanos se consideraron?
- Cales son os principais erros cometidos ao facer a estimación das distancias dos satélites a Xúpiter?
- As estrelas coñecidas con menos masa teñen unha masa da orde da cuarta parte do Sol. Canto máis masivo debería ser Xúpiter para que puidese brillar como unha estrela?

1.8 Exercicios adicionais

- Podedes pasar a masa de Xúpiter a kg e tamén a súa relación á masa da Terra, sabendo que $M_{\text{Sol}} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 332,932 M_{\text{Terra}}$
- Comparede a forza da gravidade na superficie de Xúpiter coa da Terra e a do Sol. Evidentemente, podedes comparar con calquera planeta e lúa do Sistema Solar. Para ter información buscade, por exemplo, no sitio web de Nine Planets, <http://www.nineplanets.org/>
- Podedes comparar a forza de atracción do Sol sobre a Terra e sobre Xúpiter.
- Podedes tomar a órbita dun cometa e calcular a forza atractiva do Sol no perihelio e no afelio.

2. O centro da galaxia

A galaxia que habitamos contén 100 mil millóns de estrelas, máis gas e po. Todo iso está en rotación ao redor do centro galáctico. Baseándonos na terceira lei de Kepler outra vez, é dicir, na lei da gravitación, calcularemos a masa do obxecto situado no centro galáctico.

2.1 Obxectivos

- Determinación da masa do obxecto central
- Dedución de que se trata dun burato negro

2.2 Metodoloxía

- Obtención de observacións de estrelas cerca do centro galáctico
- Estudo do movemento destas estrelas
- Aplicación da terceira lei de Kepler

2.3 Observacións

Non podemos observar o centro galáctico con alta resolución cos telescopios que temos normalmente ao noso alcance. Requírense observacións con telescopios especializados e de gran diámetro. Por iso utilizaremos observacións dispoñibles na rede.

Por exemplo, podemos tomar as primeiras imaxes que se publicaron no ano 2002 por parte de científicos do Observatorio Europeo del Sur (ESO) e que se mostran na fig. 2.1. O sitio web é <http://www.eso.org/public/outreach/press-rel/pr-2002/pr-17-02.html>. Na figura da esquerda pódese observar o conxunto de estrelas preto do centro. Está sinalada a estrela chamada S2. Na figura da dereita vese o movemento desta estrela ao longo de 10 anos.

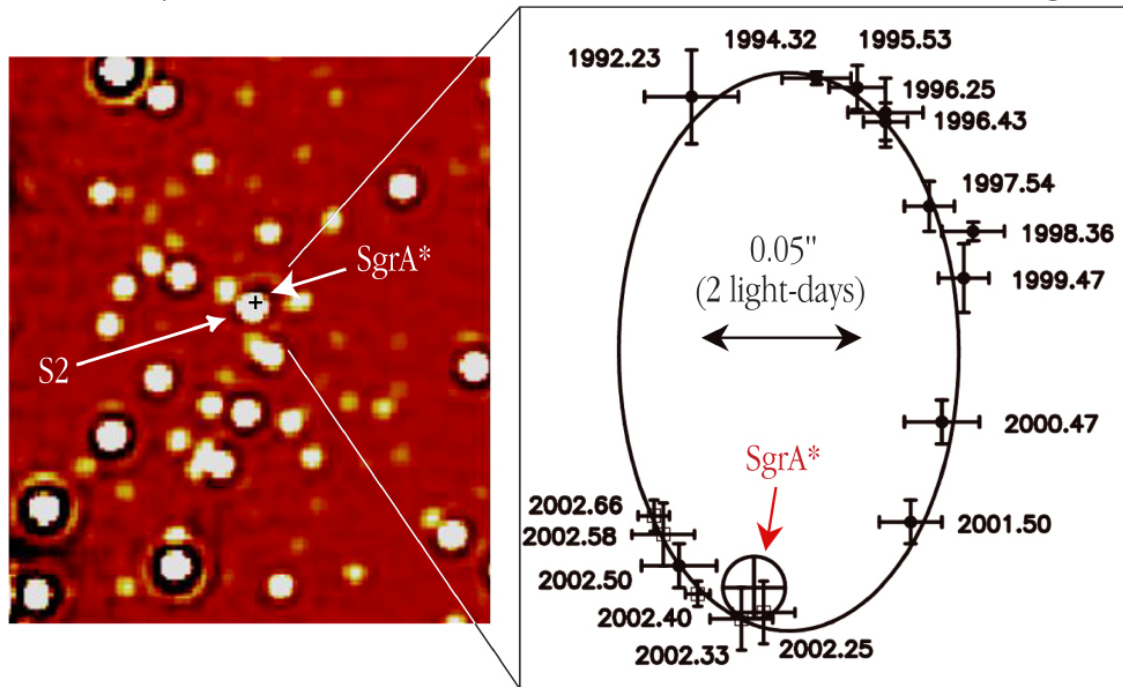
2.4 Determinación da masa do obxecto central

Trátase dunha órbita elíptica semellante á dos planetas que xiran ao redor do Sol. O cálculo da órbita dá un período de 15,73 anos.

- Medide o semidiámetro da órbita, considerando a escala que se indica na figura (a medida da frecha equivale ao espazo que percorre a luz en 2 días; a velocidade da luz é de 300 000 km/s)
- Aplícase a terceira lei de Kepler, tal como o fixestes para o caso do parella Sol-Xúpiter á parella centro-estrela S2.
- Dedúcese a masa do obxecto no centro da galaxia.

NACO May 2002

S2 Orbit around SgrA*



The Motion of a Star around the Central Black Hole in the Milky Way

ESO PR Photo 23c/02 (9 October 2002)

© European Southern Observatory



Figura 2.1: Estrelas preto do centro galáctico e órbita da estrela S2

2.5 Exercicios adicionais

O obxecto central é moi masivo, pero non loce como millóns de veces o noso Sol. De feito, na fig. 2.1 (esquerda) só ven estrelas. É porque o obxecto central é moi masivo e tamén moi compacto. Trátase dun buraco negro.

- Calcule a distancia ao centro do buraco negro á que a velocidade de escape é igual á velocidade da luz.
- Compare o valor da gravidade a esta distancia coa gravidade á superficie da Terra ou do Sol.

O Sol describe unha órbita practicamente circular na contorna do centro galáctico cun raio duns 28.000 anos luz e cun período de 250 millóns de anos.

- Calcule a velocidade lineal do Sol.
- Que masa hai situada entre o centro galáctico e o Sol para que se mova a esta velocidade?