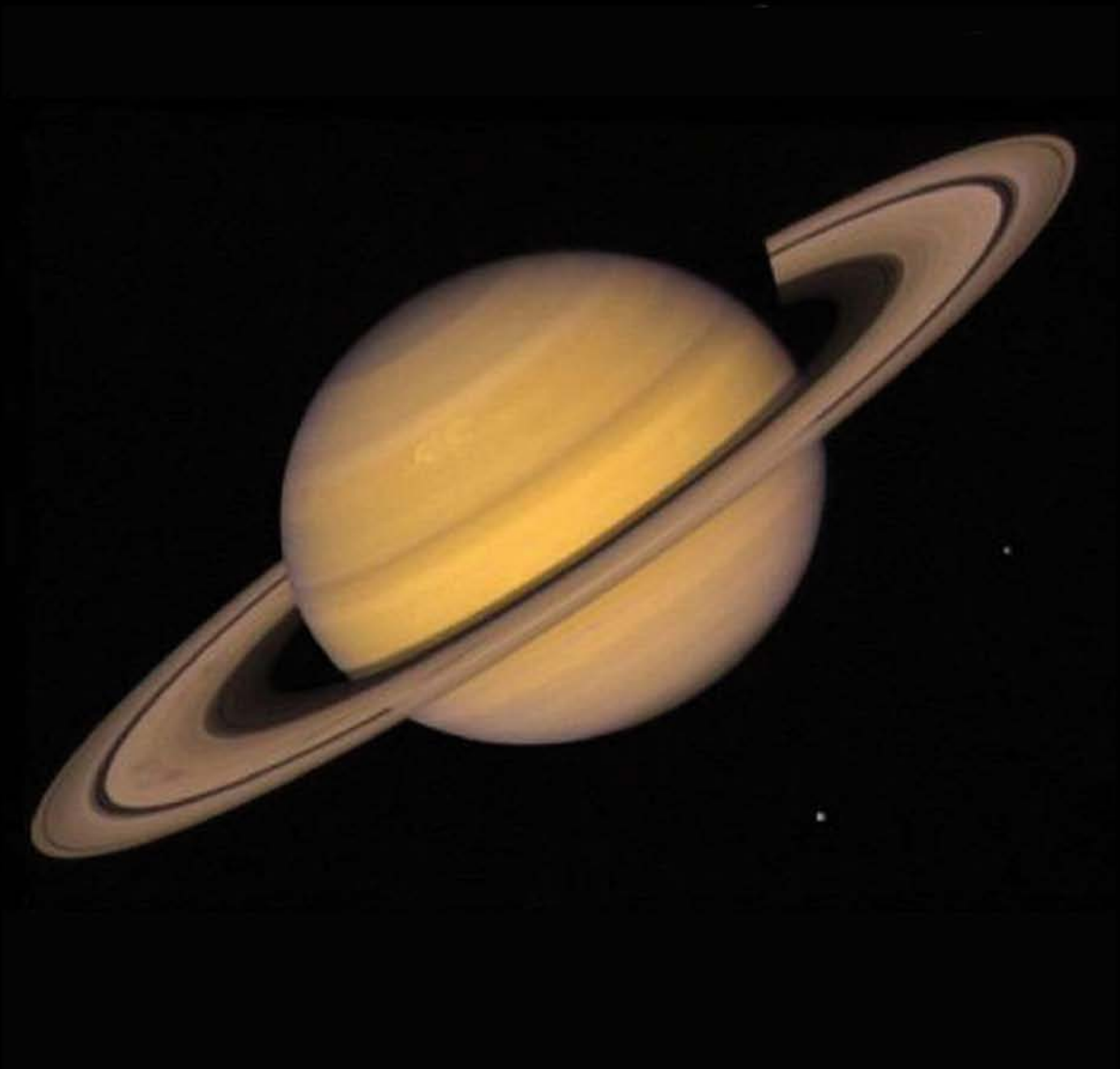


SATURN: ELS SEUS ANELLS I EL SEU ESPECTRE



Saturn: els seus anells i el seu espectre

Resum:

En aquesta unitat s'estudien les diferents inclinacions que presenten els anells de Saturn observant-los des de la Terra, i per mitjà d'elles es calcula la inclinació de l'eix del planeta. També es presenta "l'Efecte Doppler-Fizeau" i amb ell s'interpreten els espectres lluminosos de Saturn i els seus anells.

Continguts:

Càlcul de la inclinació de Saturn utilitzant els seus anells

L'efecte Doppler-Fizeau

L'espectre de Saturn

Càlcul de la velocitat i període de rotació de Saturn utilitzant el seu espectre

Càlcul de la velocitat de rotació dels anells de Saturn utilitzant el seu espectre

Càlcul de la massa i la densitat de Saturn utilitzant les lleis de Newton

Material addicional

Nivell:

Segon cicle d' ESO y Batxillerat

Referència:

10th EAAE International Summer School,
<http://www.eaae-astro.org>, <http://www.eaae-astronomy.org>
<http://www.csic.es/astrosecundaria>

Autors :

Francis Berthomieu (Comité de Liaison Enseignants et Astronomes, CLEA (France))
Rosa M. Ros Ferré (Universitat Politècnica de Catalunya)

Coordinadora apunts pedagògics "Con A de Astrónomas":

Josefina F. Ling (Universitat de Santiago)

Ajudants de maquetació i traducció:

Surinye Olarte Vives, Alejandra Díaz Bouza



SATURN: ELS SEUS ANELLS I EL SEU ESPECTRE

Resum

Tothom coneix el planeta Saturn, associant-lo als seus anells. Menys conegut és el fet que aquests anells no es veuen sempre de la mateixa manera des de la Terra. Aquest treball ho estudia especialment. Considerem els anells observats des de la Terra per calcular la inclinació de l'eix de rotació del planeta.

El "Efecte Doppler-Fizeau" és una eina d'usos múltiples en l'astrofísica. S'explica en què consisteix i es donen les conseqüències matemàtiques que es dedueixen del mateix. Es mostra després com serveix per interpretar algunes imatges d'espectres lluminosos, tal com el de Saturn i els seus anells.

Càlcul de la inclinació de Saturn utilitzant els seus anells

Els anells de Saturn es troben en el pla equatorial del planeta. L'eix de rotació de Saturn té una inclinació de 27° amb el pla de l'òrbita i aquesta òrbita està inclinada $2,5^\circ$ sobre el pla de translació de la Terra, el pla de l'eclíptica, (Figura 1), i per això Saturn ens ofereix aspectes variats (Figura 2).

Els anells de Saturn ens donen l'oportunitat de calcular fàcilment la inclinació del planeta. Si Saturn no tingués cap inclinació, els seus anells apareixerien sempre de la mateixa manera. En realitat, la inclinació aparent dels anells canvia d'un valor màxim de 27° a zero, i en aquest cas, els anells no es veuen.

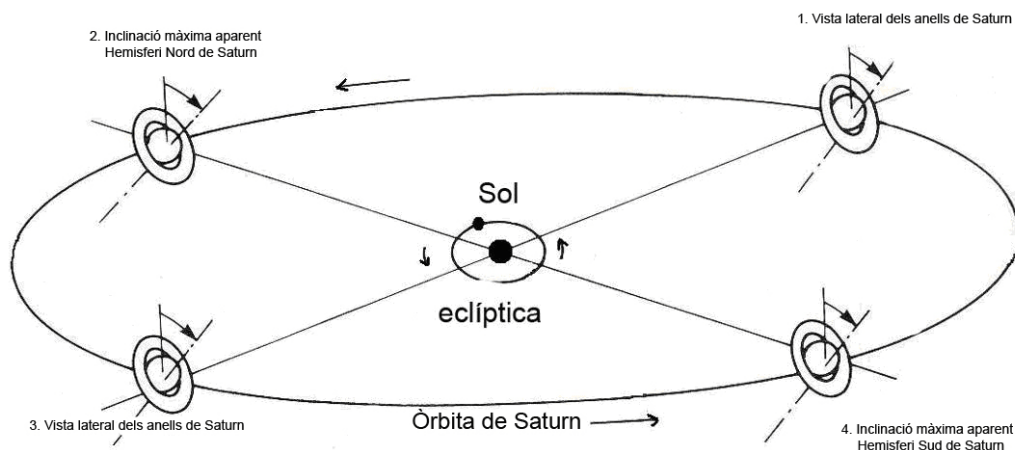


Figura 1. L'eix de rotació de Saturn està inclinat sobre el pla de la seva òrbita i aquest pla està inclinat en relació a l'eclíptica

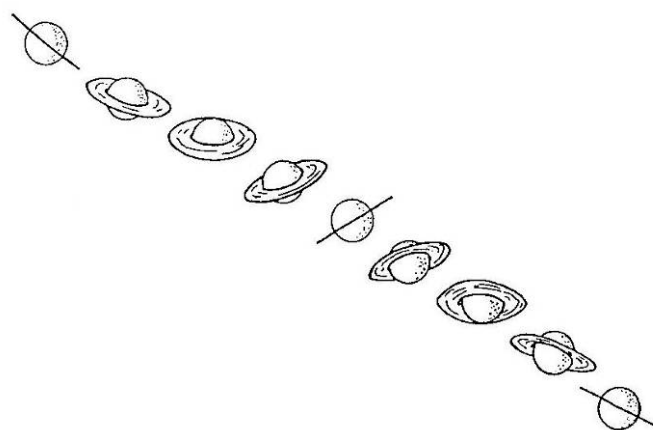


Figura 2. L'aspecte de Saturn canvia.

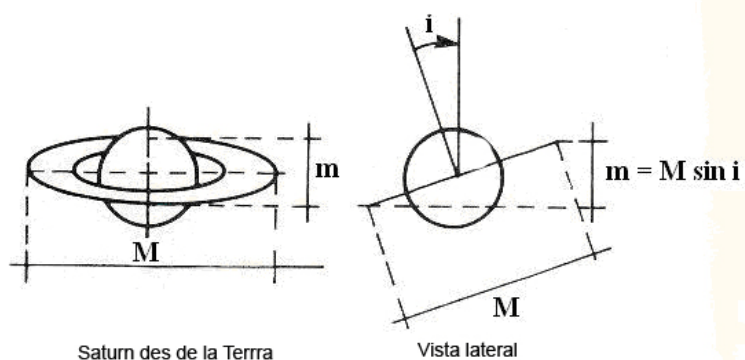


Figura 3. Observant els anells de Saturn des de la Terra

És molt senzill mesurar la inclinació dels anells a cada una de les fotografies. Anomenant m a l'eix menor i M a l'eix major dels anells de la foto; la inclinació i pot obtenir-se de la figura 3 per:

$$i = \arcsin(m/M)$$

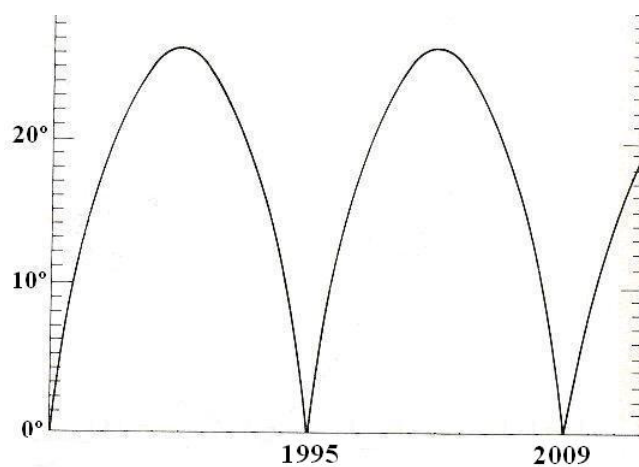


Figura 4. Gràfica de la variació de la inclinació aparent dels anells de Saturn respecte al temps.

Donat que la variació de la inclinació dels anells es periòdica (Figura 4), podem calcular la inclinació corresponent a cada una de les fotos que aquí es presenten (Figures 5a, 5b, 5c, 5d, 5e, 5f, 5g, 5h, 5i, 5j i 5k). Aquest valor pot situar-se a la Figura 4. Es pot observar, a cada pas, la posició del punt a la gràfica i deduir si la inclinació està creixent o disminuint.

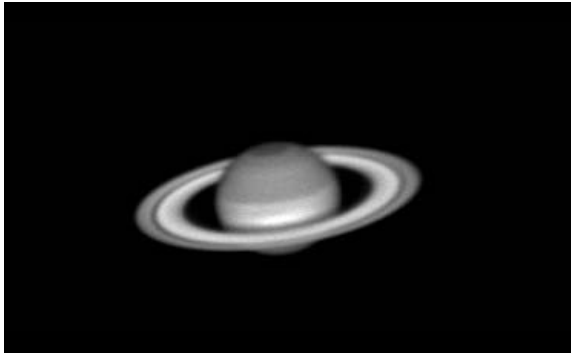


Figura 5a. Saturn al novembre del 1999



Figura 5b. Saturn al setembre del 2000



Figura 5c: Saturn a l'agost del 2001



Figura 5d: Saturn al setembre del 2002



Figura 5e: Saturn al novembre del 2003



Figura 5f: Saturn al gener del 2004

Figura 5. Diferents fotografies de Saturn i els seus anells (Albert Capell, Barcelona)

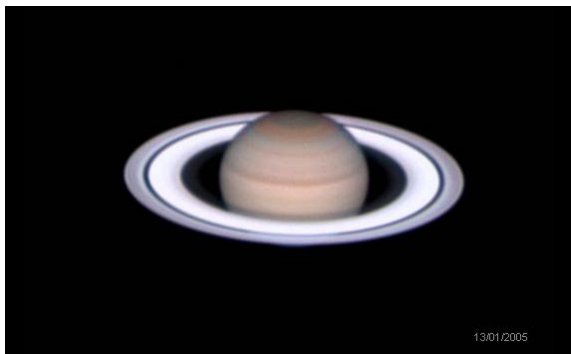


Figura 5g: Saturn al gener del 2005

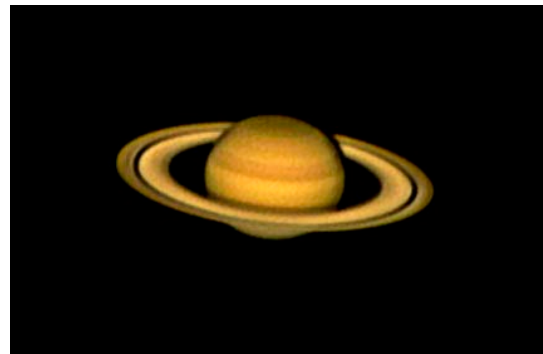


Figura 5h: Saturn al Febrer del 2006

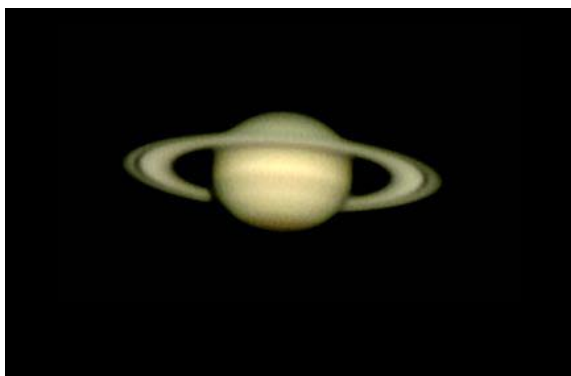


Figura 5i. Saturno al Febrer del 2007

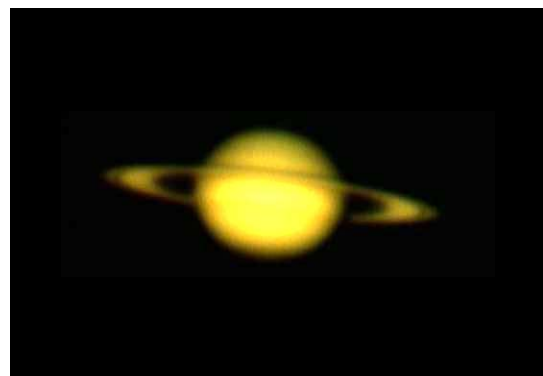


Figura 5j. Saturn al gener del 2008



Figura 5k: Saturn al març del 2009

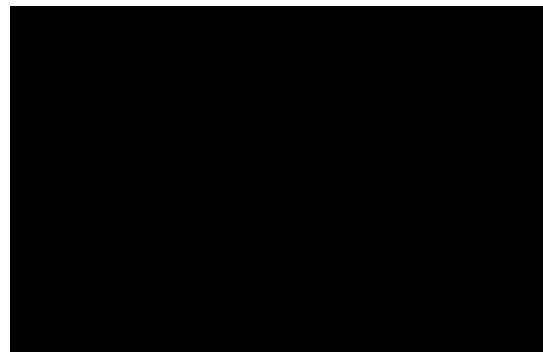


Figura 5. Diferents fotografies de Saturn i els seus anells (Albert Capell, Barcelona)

Per exemple:

- De la fotografia 5d del 2002, es dedueix $m = 20 \text{ mm}$ i $M = 46 \text{ mm}$ i en conseqüència $i = 27^\circ$
- Per l'any 2007 a la fotografia 5i es mesuren respectivament 14 mm i 54 mm obtenint-se $i = 15^\circ$

Contes de fades... i periodicitat

Molts dels fenòmens astrofísics tenen que veure amb la noció de periodicitat. Trobarem aquests tipus de problemes quan estudiem l'efecte Doppler-Fizeau o la mesura de la velocitat de la llum d'Olaus Römer. Un conte de prínceps i princeses ens ajudarà, en aquesta breu presentació, a entendre de forma senzilla aquest problemes delicats.

El Príncep Joan i la Princesa Anna

“El Príncep Joan se'n va anar de viatge d'exploració amb el seu vaixell, deixant a la Princesa Anna al seu castell.

Com tots els enamorats, necessitaven estar en contacte: van decidir utilitzar palomes missatgeres. El Joan va sortir un diumenge a les dotze i li va prometre a l'Anna que li enviaria un colom(amb algun missatge secret) cada dia a les dotze. I així ho va fer durant tot el seu viatge!

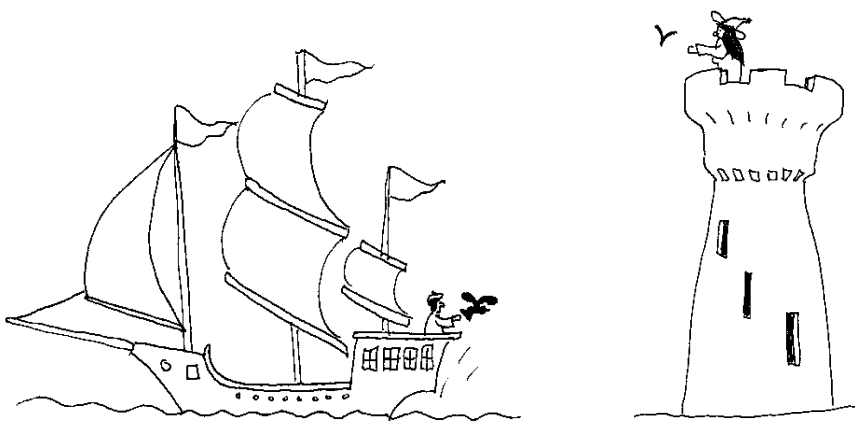


Figura 6. El Príncep Joan i la Princesa Ana

Ella esperava cada dia a les dotze a dalt de tot de la seva torre. Però els coloms mai van arribar a les dotze, sempre arribaven més tard!

Durant la primera setmana : Van arribar amb una periodicitat de 25 hores !

Després per un dia, el període va ser de 24 hores. I fins que va tornar el Príncep a casa seva: El període va ser de 23 hores!










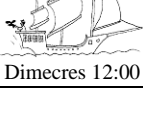
Ara mirem amb atenció la nostra historieta i tractarem de trobar la explicació d'aquest estrany fenomen...

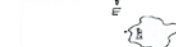
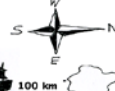
És bastant senzill entendre'l si es sap que:

- *El vaixell del Príncep Joan recorre 100 Km per dia.*
- *Els coloms volen a 100 Km per hora!”*










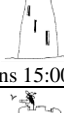
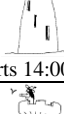

Vegem el següent esquema:

Missatge enviat el:

 Dilluns 12:00
 Dimarts 12:00
 Dimecres 12:00
 Dijous 12:00
 Divendres 12:00
 Dissabte 12:00
 Diumenge 12:00
 Dilluns 12:00
 Dimarts 12:00
 Dimecres 12:00



Missatge rebut el:

 Diumenge 12 :00
 Dilluns 13:00
 Dimarts 14:00
 Dimecres 15:00
 Dijous 16:00
 Divendres 17:00
 Dissabte 17:00
 Diumenge 16:00
 Dilluns 15:00
 Dimarts 14:00
 Dimecres 13:00
 Dijous 12:00

El Efecte Doppler-Fizeau

Tots nosaltres hem pogut sentir una conseqüència de l'Efecte Doppler en l'acústica. Quan un cotxe s'aproxima tocant el clàxon, es sent un so més agut que quan s'allunya. Un so és un fenomen periòdic, els paràmetres físics del qual són la freqüència N i el període T . Es propaga amb una velocitat C . Aquests paràmetres ens permeten definir una longitud d'ona $\lambda = CT$ ó $\lambda = C/N$.

Com es pot explicar l'aparent modificació d'aquests paràmetres quan la font de so es mou relativament a l'observador? Imaginem tres punts ubicats en una mateixa línia recta Ox . A i B no es mouen, mentre que C es mou amb velocitat constant anant des d'A cap a B. Suposem que C vagi emetent un so caracteritzat per la seva freqüència N_0 i el seu període T_0 .

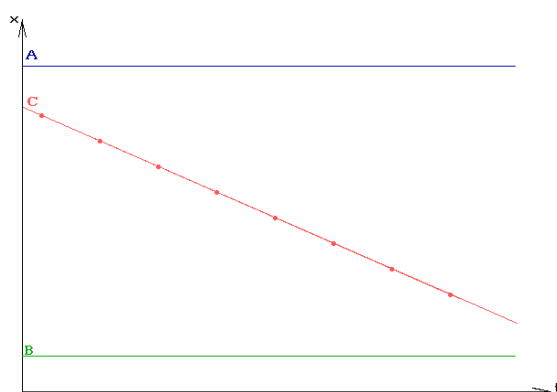


Figura 7. Els punts A i B no es mouen i C es mou amb velocitat constant

En la Figura 7 es pot apreciar una representació gràfica d'aquesta situació, en relació amb el temps t . Podem suposar que C està emetent un “top” cada T segons, com indiquen els punts del dibuix. Com que el so es propaga amb la velocitat C , tarda algun temps a anar des de C fins a A (Figura 8a) o B (Figura 8b), segons la distància que ha de recórrer.

Als dibuixos, podem representar la propagació del so per línies rectes, i veure en quin instant arriba el so d'un “top” al punt A o al punt B.

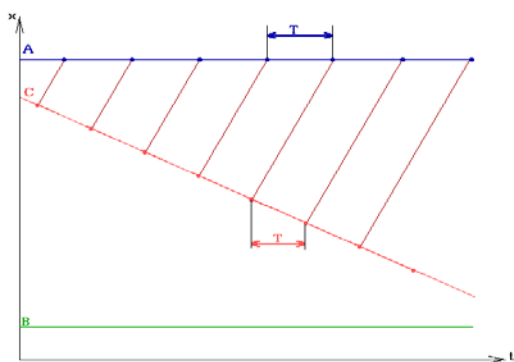


Figura 8a. Per anar de C fins a A

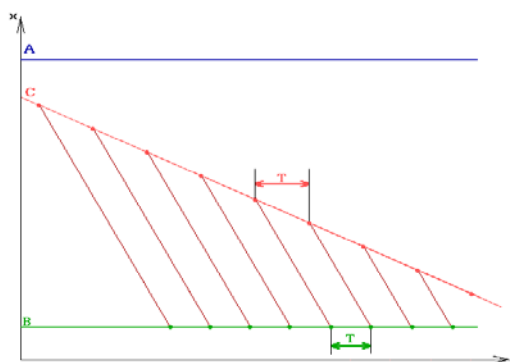


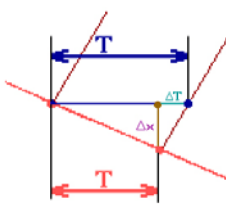
Figura 8b. Per anar de C fins a B

Es nota clarament que el període T del fenomen, tal com el percep l'observador A, és més llarg que T_0 , mentre que a B sembla més curt.

Així podem deduir:

- Si la font de so s'allunya de l'observador, el període del so sembla més llarg que l'original. La seva longitud d'ona també es veu més llarga que l'original. La freqüència sembla disminuir i el so és més greu.
- Si la font de so s'apropa a l'observador, el període de so sembla més curt que l'original. La seva longitud d'ona també es veu més curta que l'original. La freqüència sembla augmentar i el so és més agut.

Ara podem mirar les Figures 8c y 8d, que corresponen respectivament a aquestes dues situacions.

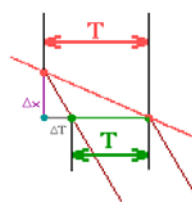


$$c = \frac{\Delta x}{\Delta T}$$

$$\frac{1}{c} v = \frac{\Delta T}{\Delta x} \frac{\Delta x}{T}$$

$$\boxed{\frac{v}{c} = \frac{\Delta T}{T}}$$

Figura 8c. Si la font de so s'allunya



$$c = \frac{\Delta x}{\Delta T}$$

$$\frac{1}{c} v = \frac{\Delta T}{\Delta x} \frac{\Delta x}{T}$$

$$\boxed{\frac{v}{c} = \frac{\Delta T}{T}}$$

Figura 8d. Si la font de so s'apropa

Aquí podem comparar els períodes T y T_0 , i tenir una manera senzilla de relacionar-los amb V y C .

Els càlculs mostren que $\Delta T/T = V/C$. Sabent que $\lambda_0 = CT$ y $\Delta\lambda = C \Delta T$ i utilitzant el càlcul obtingut, es dedueix, $\Delta\lambda/\lambda = V/C$.

Per el cas de la llum la situació és similar. La seva velocitat és molt més gran que la del so i les longituds d'ona de la llum visible molt més curtes, però les fórmules matemàtiques són les mateixes. Si considerem una font monocromàtica de llum, només té una longitud d'ona, i podem treure les conseqüències següents:

- Si la font de llum s'allunya de l'observador, el seu període sembla més gran que l'original Així com la longitud d'ona: es pot dir que s'ha mogut cap a la part vermella de l'espectre. Per això es parla de descalatge cap al vermell o "desplaçament cap al vermell".
- Si la font de llum s'apropa a l'observador, el seu període sembla més curt que l'original Així com la longitud d'ones: es pot dir que s'ha mogut cap a la part blava de l'espectre. Per això es parla de descalatge cap al blau o "desplaçament cap al blau".

Què passa quan es tracta d'una font de llum "composta", tal com la llum blava? La seva descomposició per un prisma o una xarxa de difracció dona un espectre de colors,

constituït per totes les longituds d'ona; si aquesta font de llum es mou en relació a l'observador, cada una es mou cap al costat blau o vermell de l'espectre.

Mirem ara a la llum que rebem d'una estrella, tal com el Sol. El seu espectre no és continu: es poden observar unes quantes línies negres, les longituds d'ona de les quals corresponen als elements que la llum va tenir que travessar en el seu viatge cap a l'observador. Podem veure el mateix espectre si utilitzem la llum que prové d'un planeta degut a que és la llum solar reflectida per la superfície del planeta, jugant el paper de mirall, i podem observar quantitat de ratlles negres, corresponent cada una d'elles a una longitud d'ona característica.

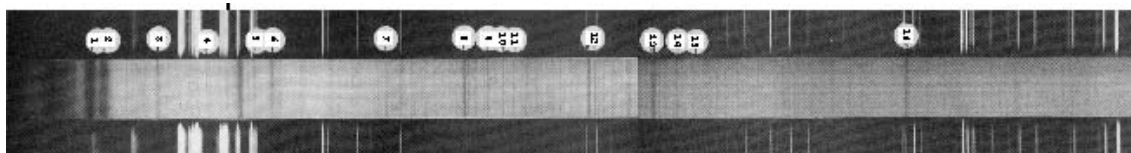


Figura 9. Espectre solar

Què passa si la font de llum es mou respecte de l'observador? Cada una de les longituds d'ona sembla modificada i desplaçada cap a la part vermella o blava de l'espectre, segons si aquesta s'està movent cap a l'observador o des de l'observador. Si ens proposem mesurar aquest desplaçament, haurem d'utilitzar un espectre molt ben conegut, anomenat de referència.

El espectre de Saturn

Mirem l'espectre pres a l'«Observatoire de Haute Provence» el 24 de juliol del 1962. En aquella data, Saturn estava gairebé en oposició al Sol, i l'angle del pla del seu anell amb la direcció Observador - Saturn era molt petit. La seva distància a la Terra era 1.3×10^9 km.

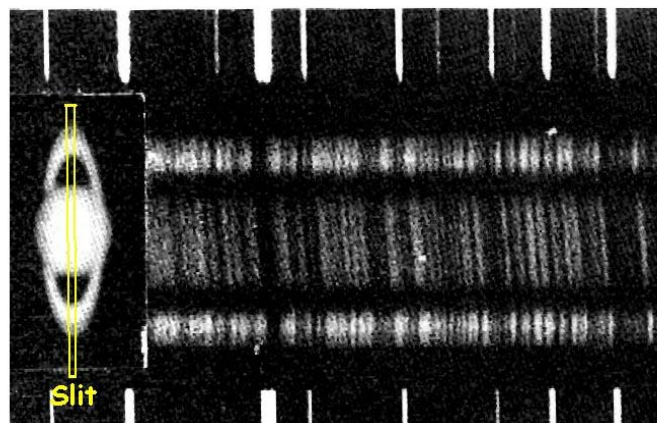


Figura 10. Mostra com estava ubicada la reixeta de l'espectroscopi

A la Figura 10, la reixeta passa per un diàmetre del planeta (que pot ésser considerat com l'equador del planeta) i els dos extrems dels seus anells. Això, permet obtenir 3 franges en una mateixa imatge. A la part mitjana, la franja més ampla és l'espectre de la llum que ens torna el globus de Saturn. Als seus costats apareixen els espectres de les extremitats dels seus anells. Per fi apareix un espectre de comparació, amb les línies d'emissió del ferro

que són molt ben conegudes, tret amb el mateix espectroscopi: permetrà conèixer fàcilment cada longitud d'ona. Es donen algunes d'aquelles longituds d'ona.

Com es pot apreciar, les línies dels tres espectres es veuen inclinades, i no les de l'espectre de referència del ferro. Això ho explica l'efecte Doppler-Fizeau i el moviment radial de cada punt, considerat com un mirall que reflexa la llum del Sol.

La esfera de Saturn està girant al voltant del seu eix, de tal manera que una part del seu equador s'apropa a nosaltres, mentre una altra part s'allunya, cada un d'aquests punts movent-se amb diferent velocitat radial, relativament a nosaltres, ubicats a la Terra.

Els anells també es mouen al voltant del planeta, però cada una de les roques que els constitueix es mou a una velocitat diferent. Per utilitzar les fórmules de l'efecte Doppler-Fizeau, s'entén fàcilment que tindrem que utilitzar la velocitat radial de cada font de llum.

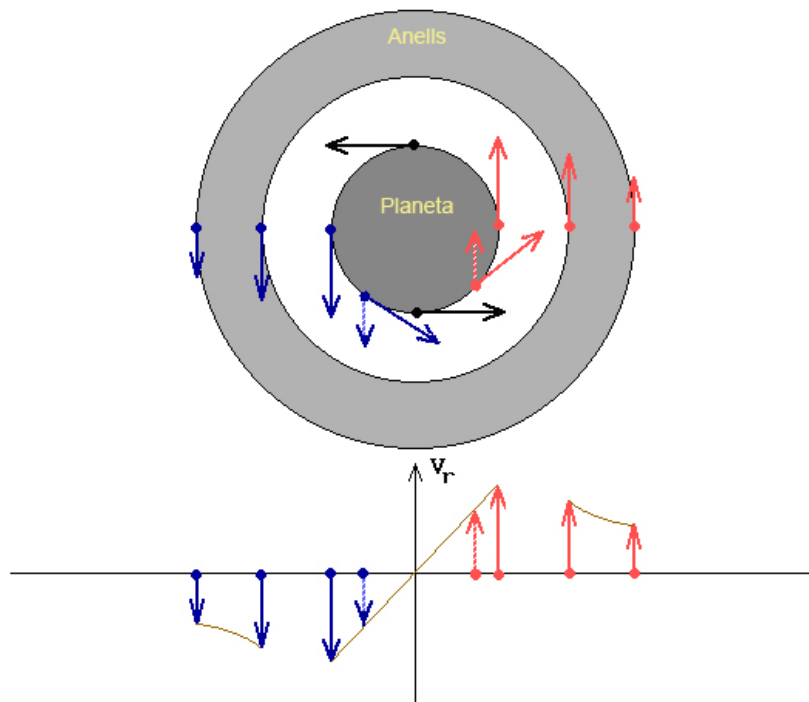


Figura 11. Vista superior de Saturn i els seus anells

¡Compte!

Aquells objectes actuen com miralls per a la llum solar. Si tal mirall es mou en relació a nosaltres amb certa velocitat radial V_r , la imatge que proporciona del Sol sembla moure's amb una velocitat doble $2V_r$. Així, el valor que podem incloure a les fórmules de l'efecte Doppler-Fizeau haurà de ser $V=2V_r$.

- Informació complementaria:

Radi de Saturn: $R = 6,04 \times 10^4$ Km.

Càlcul de la velocitat i període de rotació de Saturn utilitzant el seu espectre

Es nota clarament que les línies de l'espectre de l'esfera de Saturn estan inclinades i paral·leles mentre que les de l'espectre de referència no n'estan. Aquesta inclinació és deguda al moviment de rotació del planeta. Un extrem de l'equador del planeta s'apropa a l'observador (amb una velocitat relativa a la que li donarem el valor negatiu $-V_r$) mentre l'altre s'allunya (amb una velocitat relativa a la que li donarem el valor positiu V_r). Per al primer, i segons el que hem vist sobre l'efecte Doppler-Fizeau (sense oblidar que la velocitat V utilitzada a la fórmula ha d'estar multiplicada per 2), la longitud d'ona observada λ_{ob1} sembla més curta que el seu valor en repòs λ_e :

$$(\lambda_{ob1} - \lambda_e) / \lambda_e = -2V_r / C$$

Per al segon, sembla més llarga:

$$(\lambda_{ob2} - \lambda_e) / \lambda_e = +2V_r / C$$

(Nota: Per a qualsevol altre punt de l'equador del planeta es pot realitzar un raonament similar, utilitzant com a velocitat relativa el seu valor radial, obtingut projectant el vector velocitat sobre la direcció observador-planeta. Resulta així que les línies estan inclinades i segueixen una recta).

Ens proposem calcular la velocitat de rotació dels punts situats sobre l'equador de Saturn. Per a guanyar precisió, estudiarem els dos punts extrems del diàmetre, la velocitat radial dels quals és més gran, i utilitzarem les fórmules de l'efecte Doppler-Fizeau. Restant les dos fórmules anteriors es pot obtenir:

$$(\lambda_{ob2} - \lambda_{ob1}) / \lambda_e = +4V_r / C$$

d'on aïllant la velocitat de rotació es té

$$V_r = C \cdot (\lambda_{ob2} - \lambda_{ob1}) / 4\lambda_e$$

Ara hem de determinar sobre l'espectre de la figura 13 els valors de λ_{ob1} , λ_{ob2} i λ_e .

Primer utilitzant dues línies de l'espectre de referència i mesurant la seva distància a la fotografia, es determina l'escala de la fotografia (per exemple en àngstrom per mil·límetre: mesurem 95,0 mm entre les línies 4494,57 Å i 4466,54 Å. El càlcul dona per l'escala: 28,03/95=0,295 Å/mm

Mesurant la diferència entre les abscisses dels punts extrems d'una mateixa línia de l'espectre es troben 2,0 mm, o sigui $(\lambda_{ob2} - \lambda_{ob1}) = 0,59$ Å.

Per a λ_e prendrem un valor mitjà com 4480 Å, i podrem trobar un valor aproximat: $V_r = 3 \cdot 10^8 \cdot 0,59 / (4 \cdot 4480) = 9,9 \cdot 10^3$ m/s o sigui aproximadament **10 km/s**

Per deduir el període de rotació P del planeta Saturn, utilitzarem la velocitat de rotació calculada i el radi del planeta $R = 6,04 \cdot 10^4$ km. Sabem que $2\pi R = V_r \cdot P$ i en conseqüència podem deduir

$$P = 2\pi R / V_r$$

això és $P = 3,79 \cdot 10^4$ s, és a dir $P = 10\text{h } 32\text{min}$ (El valor actualment acceptat és 10h 14min)

Càlcul de la velocitat i període de rotació dels anells de Saturn utilitzant el seu espectre

N'hi ha prou amb observar les línies de l'espectre dels anells per a veure, aplicant aquí també les relacions de l'efecte Doppler-Fizeau, que la part interior de l'anell gira més ràpidament que la exterior, per tant els anells no es comporten com un cos sòlid.

Aplicant el mateix raonament que vam fer per a la rotació del planeta, calcularem la velocitat de la part exterior de l'anell. Considerant els dos extrems d'una línia de l'espectre corresponent a l'anell, dóna una diferència entre les abscisses d'uns 3,5 mm. Fent un càlcul similar a l'apartat anterior, obtenim una velocitat: $V_r' = 17,5$ Km./s

A la fotografia de la figura 13, es pot comparar el diàmetre de l'esfera de Saturn i el diàmetre extern de l'anell: mesuren respectivament 23 mm y 54 mm. Coneixent el valor del radi de Saturn $R = 6,04 \cdot 10^4$ Km., es pot calcular el radi extern R_{\max} de l'anell: $R_{\max} = 54 \cdot R / 23$ o sigui aproximadament $R_{\max} = 1,42 \cdot 10^5$ Km.

El període de rotació del marge exterior dels anells es calcula com en el cas del planeta. S'obté: $P' = 2\pi R_{\max} / V_r'$ o sigui $P' = 14\text{h } 09\text{min}$

Càlcul de la massa i la densitat de Saturn utilitzant les lleis de Newton

Partint dels resultats anteriors i de les lleis de Newton, es pot estimar el valor de la massa M_s de Saturn. Aplicant la llei de Newton a una pedra de massa m circulant amb velocitat V' a la part més exterior de l'anell a la distància R_{\max} del centre del planeta, es pot escriure, essent G la constant de la Gravitació Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$:

$$M \cdot V'^2 / R_{\max} = G \cdot M_s \cdot m / R_{\max}^2$$

on simplificant es dedueix la massa de Saturn:

$$M_s = V'^2 \cdot R_{\max} / G$$

Substituint els valors calculats abans per a la velocitat i el radi màxim de la part més exterior de l'anell s'obté $M_s = 6,5 \cdot 10^{26} \text{ kg}$ (El valor actualment acceptat és $5,7 \cdot 10^{26} \text{ kg}$)

Per a calcular la densitat de Saturn es necessita conèixer la massa i el volum del cos. Coneixent el radi R de Saturn, es pot calcular el seu volum V_s

$$V_s = 4 \cdot \pi \cdot R^3 / 3$$

Es calcula aleshores la seva densitat: $d = M_s / V_s = 0.70$. i Aixà es confirma que Saturn podria surar sobre l'aigua, sempre i quant s'aconseguís un "llac" prou gran per a rebre'l.

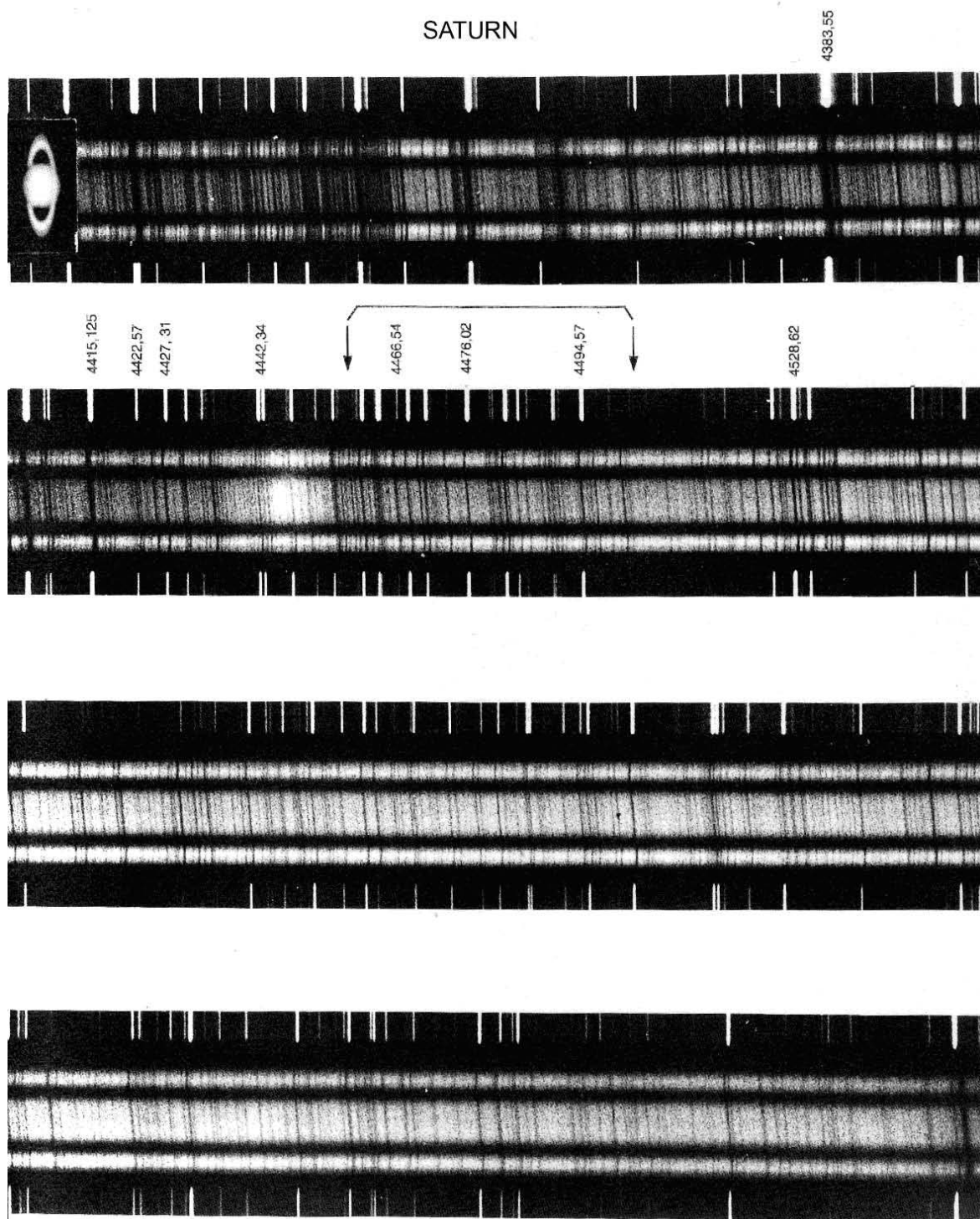


Figura 12. Espectre del planeta Saturn i els seus anells (Observatoire de Haute Provence)

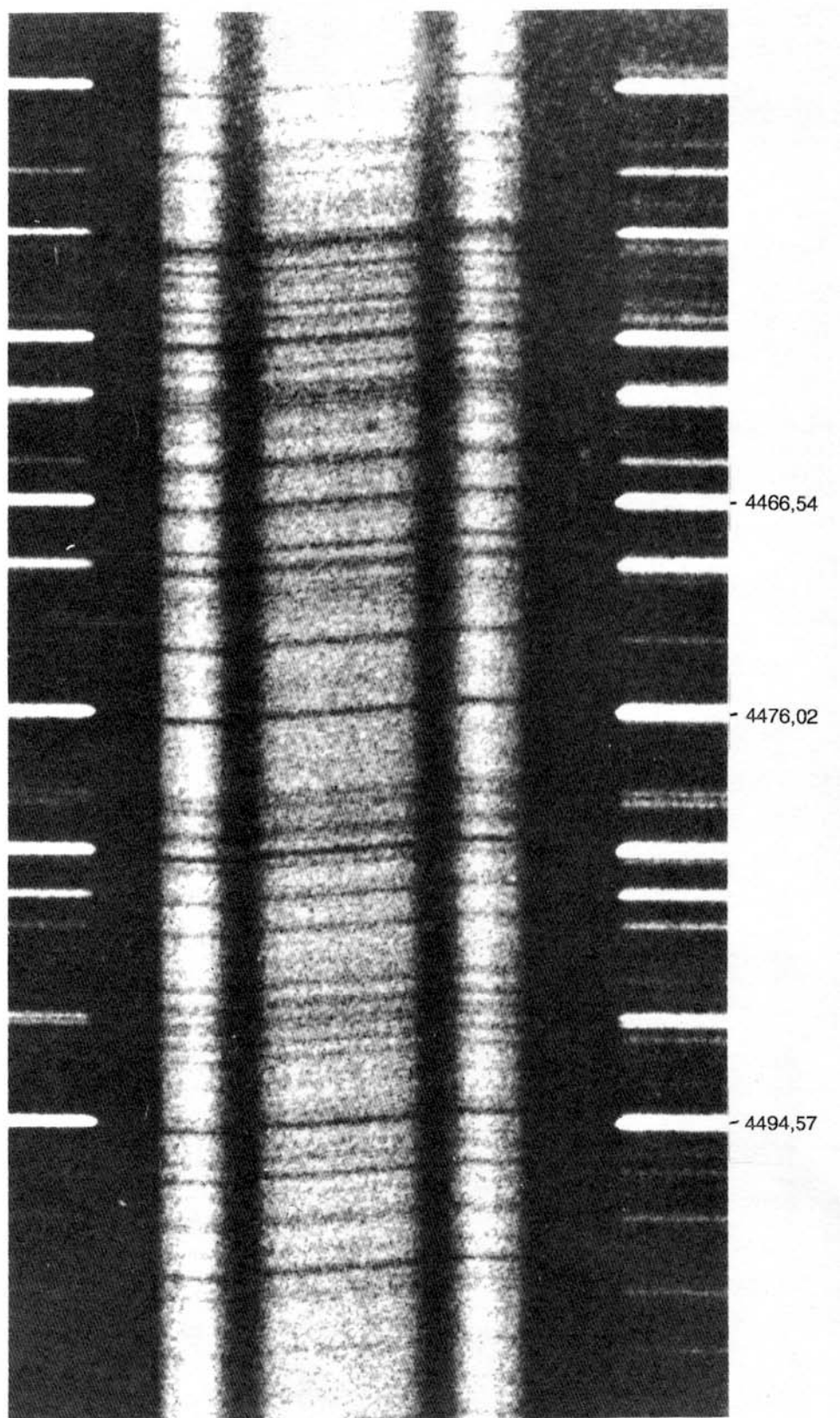


Figura 13. Detall de la figura anterior. Espectre del planeta Saturn i els seus anells (Observatoire de Haute Provence, 24/07/1962)

Material adicional

- Berthomieu, F., Ros, R.M., About Saturn's Rings and its Spectrum, Proceedings of 10th EAAE International Summer School, 11, 38, Barcelona, 2006.
- Ros, R.M., Viñuales, E., Saurina, C., Astronomía: Fotografía y Telescopio, Mira Editores. Zaragoza, 1993.
- Es poden obtenir imatges originals de l'espectre:
<http://www.ac-nice.fr/clea/CleaCommande.html>
- Es poden obtenir altres documents útils a:
<http://www.csic.es/astrosecundaria>